Dipl.-Math. Dieter Hetzel 1.3.2020

Die Herleitung der Lorentz-Transformation der speziellen Relativitätstheorie

Es soll hier gezeigt werden, dass sich die Lorentz-Transformation der speziellen Relativitätstheorie aus der Vorgabe der physikalisch notwendigen Eigenschaften zwangsläufig ergibt.

1. Galileo-Transformation

Wir betrachten zwei gegeneinander mit der konstanten Geschwindigkeit u bewegte Koordinatensysteme (Inertialsysteme). Diese bezeichnen wir mit den Indices 1 und 2. Die Ableitung erfolgt eindimensional. Diese Setzung ist zulässig, da man die Koordinatensysteme so ausrichten kann, dass die x-Achse in Richtung der Geschwindigkeit zeigt.

Es gilt dann gemäß der Galileo-Transformation

$$x_2 = x_1 + u \bullet t \cdot \qquad (1)$$

Wir betrachten nun einen Massepunkt, der sich im System 1 mit der Geschwindigkeit v_1 bewegt: $x_1 = v_1 \bullet t$.

Im System 2 gilt dann: $x_2 = v_1 \bullet t + u \bullet t = (v_1 + u) \bullet t$ (2)

Somit beträgt gilt für die Geschwindigkeit v_2 im System 2:

$$v_2 = v_1 + u \qquad (3)$$

Bei geeigneter Wahl von v_1 und u wird v_2 größer als die Lichtgeschwindigkeit c, was physikalisch unmöglich ist. Vielmehr ist experimentell z.B. im Michelson-Experiment bestätigt worden, dass, wenn $v_1 = c$ ist, auch $v_2 = c$ ist.

Die Galileo-Transformation muss also zumindest für höhere Geschwindigkeiten durch eine andere Transformation ersetzt werden. Diese wird Lorentztransformation genannt.

2. Lorentztransformation

Für die Transformation machen wir folgende Vorgaben:

1. Die Transformation soll bei gegebenem u eine lineare Beziehung sein.
2. Es muss gelten; $v_1 = c \;\; \Rightarrow \;\; v_2 = c$.
3. Für kleine u, v_1 und v_2 soll sie in die Galileo-Transformation übergehen.

Es zeigt sich, dass eine alleinige Änderung der Beziehung (1) diesen Vorgaben nicht gerecht wird. Vielmehr ist es erforderlich, auch die Zeit zu transformieren.

Wir machen den Ansatz:

$$x_2 = a \bullet x_1 + b \bullet u \bullet t_1 \quad (4a)$$

$$t_2 = d \bullet u \bullet x_1 + e \bullet t_1 \quad (4b)$$

Der Buchstabe c wird hierin nicht als Koeffizienten-Name verwendet, da er für die Lichtgeschwindigkeit reserviert ist.

Da beide System gleichberechtigt sind, muss die Transformation vom System 2 ins System 1 analog lauten:

$$x_1 = a \bullet x_2 - b \bullet u \bullet t_2 \quad (5a)$$

$$t_1 = -d \bullet u \bullet x_2 + e \bullet t_2 \quad (5b)$$

Die Vorzeichen bei den Termen $b \bullet u \bullet t_2$ und $d \bullet u \bullet x_2$ müssen negativ sein, da vom System 2 aus gesehen die Geschwindigkeit die entgegengesetzte Richtung hat.

Das System der Transformationen (4) und (5) muss konsistent sein, d.h. bei Hintereinander-Ausführung der Transformationen muss sich die Identität ergeben.

Wir erhalten für die Transformation des Orts:

$x_1 = a \bullet x_2 - b \bullet u \bullet t_2$

$= a \bullet (a \bullet x_1 + b \bullet u \bullet t_1) - b \bullet u \bullet (d \bullet u \bullet x_1 + e \bullet t_1)$

$= a^2 \bullet x_1 + a \bullet b \bullet u \bullet t_1 - b \bullet d \bullet u^2 \bullet x_1 - b \bullet e \bullet u \bullet t_1$

$= (a^2 - b \bullet d \bullet u^2) \bullet x_1 + (a - e) \bullet b \bullet u \bullet t_1$

Die Identität ergibt sich, wenn

$$a^2 - b \bullet d \bullet u^2 = 1 \quad (6)$$

und

$$a = e \quad (7)$$

ist.

Für die Transformation der Zeit erhalten wir:

$t_1 = -d \bullet u \bullet x_2 + e \bullet t_2$

$= -d \bullet u \bullet (a \bullet x_1 + b \bullet u \bullet t_1) + e \bullet (d \bullet u \bullet x_1 + e \bullet t_1)$

$= -d \bullet u \bullet a \bullet x_1 - d \bullet b \bullet u^2 \bullet t_1 + e \bullet d \bullet u \bullet x_1 + e^2 \bullet t_1$

$= (-a + e) \bullet d \bullet u \bullet x_1 + (-d \bullet b \bullet u^2 + e^2) \bullet t_1$

Wir erhalten wieder die Relationen $a = e$ und damit folgt a^{2} $^{-}$ $b \bullet d \bullet u^2 = 1$ wie oben.

Es gilt nun gemäß (6): $d = \frac{a^2 - 1}{b \bullet u^2}$

Somit folgt aus (4b):

$$t_2 = = \frac{a^2 - 1}{b \bullet u^2} \bullet u \bullet x_1 + a \bullet t_1 = \frac{a^2 - 1}{b \bullet u} \bullet x_1 + a \bullet t_1 \quad (8)$$

Das Gleichungssystem (4) enthält nun nur noch die Parameter a und b.

Die Geschwindigkeit v_2 im System 2 beträgt

$$v_2 = \frac{x_2}{t_2} = \frac{a \bullet x_1 + b \bullet u \bullet t_1}{\frac{a^2-1}{b \bullet u} \bullet x_1 + a \bullet t_1} = \frac{a \bullet v_1 + b \bullet u}{\frac{a^2-1}{b \bullet u} \bullet v_1 + a} \qquad (9)$$

Ist $v_1 = 0$, so folgt $v_2 = \frac{b \bullet u}{a}$. Gemäß Vorgabe 3 muss nun aber $v_2 = u$ zumindest für kleine Werte von u sein. Somit gilt $a = b$ zumindest für kleine Werte von u.

Wir verwenden im Folgenden allgemein:

$$a = b \qquad (10)$$

Ist $v_1 = c$, so folgt:

$$v_2 = \frac{a \bullet c + a \bullet u}{\frac{a^2-1}{a \bullet u} \bullet c + a}$$

Da dann gemäß Vorgabe (2) auch $v_2 = c$ sein muss, folgt:

$$a \bullet c + a \bullet u = c \bullet \left(\frac{a^2-1}{a \bullet u} \bullet c + a \right)$$

$$a \bullet u = \frac{a^2-1}{a \bullet u} \bullet c^2$$

$$u^2 \bullet a^2 = c^2 \bullet (a^2 - 1) \qquad (11)$$

Somit erhalten wir:

$$a^2 = \frac{c^2}{c^2 - u^2} = \frac{1}{1 - u^2/c^2}$$

Mit den Abkürzungen $\boldsymbol{\beta = u/c}$ und $\boldsymbol{\gamma = \sqrt{1 - \beta^2}}$ ist a gegeben durch:

$$a = 1/\sqrt{1 - \beta^2} \qquad (12)$$

Der Parameter a ist also stets >=1. Strebt u -> c, so strebt a -> ∞.

Die Gleichungen der Lorentztransformation lauten somit:

$$\mathbf{x_2 = a \bullet (x_1 + u \bullet t_1)} \qquad \mathbf{(13a)}$$

$$\mathbf{t_2 = a \bullet \left(\frac{u}{c^2} x_1 + t_1\right)} \qquad \mathbf{(13b)}$$

Die Transformation (13) erfüllt die o.g. Anforderungen. Es kann gezeigt werden, dass sie die einzige lineare Transformation ist, diese die Anforderungen erfüllt.

Die Determinante der Transformation beträgt $D = a^2 \bullet (1 - \beta^2) = \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^2} = 1$.

3. Geschichtliches

Die Lorentztransformation wurde ab 1895 von dem holländischen Physiker Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) im Zusammenhang mit der Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen entwickelt. Er ging dabei noch von einem ruhenden "Äther" aus. Seine Theorie konnte jedoch die experimentellen Resultate nicht vollständig erklären.

Albert Einstein veröffentlichte 1905 den Artikel "*Zur Elektrodynamik bewegter Körper*". In diesem Artikel verwendete er die Lorentztransformation, wobei er auf ein absolutes Koordinatensystem (ruhender "Äther") verzichtete. Er konnte damit die experimentellen Resultate erklären.

4. Transformation der Geschwindigkeit

Aus (9) folgt für die Geschwindigkeit v_2:

$$v_2 = \frac{v_1 + u}{\frac{u}{c^2} \bullet v_1 + 1} \tag{14}$$

Dies weicht von der Formel (3) $v_2 = v_1 + u$ ab, die sich bei der Galileo-Transformation ergibt. Für $v_1 = c$ folgt wie gefordert $v_2 = c$.

Haben v_1 und u das gleiche Vorzeichen, so ist v_2 geringer als nach der Galileo-Transformation zu erwarten wäre.

Haben v_1 und u das unterschiedliche Vorzeichen, so ist v_2 größer als nach der Galileo-Transformation zu erwarten wäre.

Transformation der Zeit - Zeitdilatation

Wir betrachten eine Zeitdifferenz $\Delta t_1 = t_{12} - t_{11}$ im System (1). Es sei x_1 konstant. Wegen der Linearität der Gleichung (13b) folgt dann für die Zeitdifferenz Δt_2 im System(2):

$$\Delta t_2 = a \bullet \Delta t_1 \tag{15}$$

Da a bei $u \neq 0$ größer als 1 ist, ist die Zeitdifferenz Δt_2 im bewegten System größer als die Zeitdifferenz Δt_1 (Zeitdilatation). Strebt u -> c, so strebt $\Delta t_2 \rightarrow \infty$.

5. Transformation des Orts - Längenkontraktion

Wir betrachten zwei Raumpunkte x_{12} und x_{11}. Ihr Abstand im System (1) beträgt $\Delta x_1 = x_{12} - x_{11}$. Mit $\Delta t_2 = 0$ folgt wegen der Linearität der Gleichung (13a):

$$\Delta x_2 = a \bullet \Delta x_1$$

Somit ist

$$\Delta x_1 = 1/a \bullet \Delta x_2 \tag{16}$$

Da a bei $u \neq 0$ größer als 1 ist, ist die Länge Δx_1 kleiner als die Länge Δx_2 (Längenkontraktion).

Bei der Untersuchung der Auswirkungen auf andere physikalische Größen Die verzichten wir auf die Herleitung der Beziehungen.

6. Auswirkungen auf die Masse

Einem Körper der Masse m_1, der im System (1) ruht, wird im bewegten Koordinatensystem (2) die Masse

$$m_2 = a \cdot m_1$$

zugesprochen.

Umgekehrt können wir einer Masse m die Ruhemasse m_0

$$m_0 = m/a \qquad (17)$$

zuordnen.

7. Auswirkungen auf den Impuls und Kraft:

Für den Betrag p des Impulses gilt:

$$p = m \cdot v = a \cdot m_0 \cdot v \qquad (18)$$

Die Kraft F ist definiert durch:

$$F = \frac{dp}{dt} = m_0 \cdot \frac{d}{dt}\ (a \cdot v) = m_0 \cdot \frac{d}{dv}\ (a \cdot v) \cdot \dot{v}$$

Hier ist zu unterscheiden zwischen Kräften in Richtung der Geschwindigkeit und solchen, die senkrecht zu dieser erfolgen.

Bei Kräften in Richtung der Geschwindigkeit gilt für die Kraft F_L:

$$F_L = m_0 \cdot \frac{1}{(1 - \beta^2)^{1,5}}\ \dot{v} \qquad (19)$$

8. Auswirkungen auf die kinetische Energie:

Für die kinetische Energie der Masse m_0 = m, folgt dann:

$$W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot m_0 \cdot v^2 \qquad (20)$$

Für v -> c strebt W -> ∞. Daraus folgt, dass ein Körper mit Ruhemasse $m_0 > 0$ die Lichtgeschwindigkeit nicht erreichen kann, da hierfür die Zuführung einer unendlich großen Energie erforderlich wäre.

Allgemein gilt

$$W = m_0 \cdot c^2 \qquad (21)$$

Masse stellt also nur eine Manifestierung von Energie dar.

Nimmt die innere Energie eines Körper zu, z.B. durch Erwärmung, Kompression etc. so nimmt gemäß $m_0 = W/c^2$auch die Ruhemasse m_0 zu. Er wird dadurch sowohl schwerer als auch träger. Allerdings ist die Zunahme wegen des Faktors $1/c^2$ sehr gering und somit kaum messbar.

Bei der Kernspaltung ist die Summe m_2 der Massen der Spaltprodukte geringer als

die Masse m_1 des Ausgangsmaterials. Die dem Massendefekt m_1 - m_2 entsprechende Energie wird dabei in Form von Hitze und Strahlung freigesetzt.
Aus (21) folgt, dass auch Lichtwellen (Photonen), die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, eine fiktive Ruhemasse

$$m_0 = W/c^2 = h*f/c^2 \qquad (22)$$

besitzen, wobei f die Frequenz und h das Plancksche Wirkungsquantum ist.
Sie haben somit den Impuls

$$p = m \bullet c = h/\boldsymbol{\lambda} \, , \qquad (23)$$

wobei **λ** die Wellenlänge des Licht ist.
Infolge ihres Impulses üben sie beim Auftreffen auf Materie Kräfte aus.
Entsprechend ihrer Ruhemasse unterliegen Photonen) der Gravitation und werden in Gravitationsfeldern abgelenkt.
Beide Effekte beobachtet man im Weltraum.